有關 6 的一個有趣性質[註]

列志佳

摘要：本文旨在證明 6 是唯一一個完全數，其值相等於一對孿生素數之算術平均數。

定義 1：$\sigma(n)$ 指 n 的所有正因數之和，即 $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ ，$n \in N$。

定義 2：完全數是一些特殊的自然數，它所有的正真因數（即除了自身以外的正因數）的和，恰好等於它本身。若 n 是完全數，即 $\sigma(n) = 2n$ 。

定義 3：若 p 是素數，而 $p+2$ 也是素數，則 $(p,\ p+2)$ 是一對孿生素數。

定理 1：若 N 是完全數，則 $\sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2$ 。

證： $\because\ d|N \Leftrightarrow \left.\frac{N}{d}\right| N$

$\therefore\ \sum_{d|N} d = \sum_{d|N} \frac{N}{d} = N \sum_{d|N} \frac{1}{d}$

$\because\ N$ 是完全數

$\therefore\ \sum_{d|N} d = \sigma(N) = 2N$

$\therefore\ N \sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2N$

$\therefore\ \sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2$ ■

定理 2： 一個完全數的真因數必不是完全數。

證：設 N 為完全數

根據定理 1，$\sum_{d|N}\frac{1}{d}=2$

假設 d' 為 N 的真因數，而 d' 是完全數，則 $d'|N$ ， $d'\neq N$

再根據定理 1，$\sum_{d"|d'}\frac{1}{d"}=2$

∵ $d"|d'$ ， $d'|N$

∴ $d"|N$

∴ $\sum_{d"|d'}\frac{1}{d"}<\sum_{d|N}\frac{1}{d}$ $(d'<N)$

∴ $2<2$ $(\rightarrow\leftarrow)$

∴ 一個完全數的真因數必不是完全數。 ■

定理 3：6 是唯一一個完全數，其值相等於一對孿生素數之算術平均數。

證：$\because$ $1,2,3$ 是 6 的所有真因數，而 $1+2+3=6$

$\therefore$ 6 是一個完全數。

$\because$ $5,7$ 均是素數

$\therefore$ $(5,7)$ 是一對孿生素數。

$\therefore$ 6 是一個完全數，其值相等於一對孿生素數之算術平均數，即 $6=\frac{5+7}{2}$ 。

$\because$ 6 為第一個完全數 $\therefore$ 假設 $(p,\ p+2)$ 為一對孿生素數，$p>5$

當 $p=6k, p=6k+2, p=6k+3, p=6k+4,\ k\in N$ ，p 均不是素數 $(\rightarrow\leftarrow)$

當 $p=6k+1,\ k\in N$，則 $p+2=6k+3$ ， $p+2$ 不是素數 $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ $p=6k+5,\ k\in N$

當 $p=6k+5$ ， 則 $p+2=6k+7$

$$\frac{p+p+2}{2}=\frac{6k+5+6k+7}{2}=\frac{12k+12}{2}=6k+6=6(k+1)$$

若 $6(k+1)$ 是一個完全數，而 6 是 $6(k+1)$ 的真因數，根據定理 2，6 必不是完全數 $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ $6(k+1)$ 不是一個完全數。

$\therefore$ 6 是唯一一個完全數，其值相等於一對孿生素數之算術平均數。 ■

註：本文整合自筆者早年所摘錄之資料，惜當時並沒有記下相關的出處，請讀者見諒。
有關完全數的性質(包括文中的定理 1)，讀者可參考以下的一份文獻：John Voight, Perfect Numbers: An Elementary Introduction (https://math.dartmouth.edu/~jvoight/notes/perfelem.pdf)

18-4-2023