有關完全數的一些性質[註 1]

列志佳

摘要：筆者在「迷人的完全數」〔註 2〕一文中，簡述過一些有關完全數的性質，現選取了若干與完全數相關的定理，並附以證明，供對數學有興趣的讀者參考。

定義 1：$\boldsymbol{\sigma(n)}$ 指 $\boldsymbol{n}$ 的所有正因數之和，即 $\boldsymbol{\sigma(n)=\sum_{d|n}d}$ ，$\boldsymbol{n\in N}$。

定義 2：完全數是一些特殊的自然數，它所有的正真因數（即除了自身以外的正因數）的和，恰好等於它本身。若 $\boldsymbol{n}$ 是完全數，即 $\boldsymbol{\sigma(n)=2n}$ 。

例子：

$\because$ $1,2,3,6$ 是 6 的所有正因數
而 $\sigma(6)=1+2+3+6=12=2\times 6$
$\therefore$ 6 是完全數。

$\because$ $1,2,4,7,14,28$ 是 28 的所有正因數
而 $\sigma(28)=1+2+4+7+14+28=56=2\times 28$
$\therefore$ 28 是完全數。

$\because$ $1,2,4,8,16,31,62,124,248,496$ 是 496 的所有正因數
而 $\sigma(496)=1+2+4+8+16+31+62+124+248+496=992=2\times 496$
$\therefore$ 496 是完全數。

首五個完全數分別是 $6,28,496,8128$ 和 33550336。

性質 1：若 $\mathbf{gcd}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\mathbf{1}$ ，則 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{mn})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ 。

證：設 m 和 n 的標準分解式分別為

$m={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_i}^{k_i}$ ，$n={q_1}^{l_1}{q_2}^{l_2}\cdots{q_j}^{l_j}$

$\because\ \gcd(m,n)=1$

$\therefore\ p_r\neq q_s \quad \forall\, 1\leq r\leq i,\ 1\leq s\leq j$ ，p_r，q_s 為素數

$mn={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_i}^{k_i}{q_1}^{l_1}{q_2}^{l_2}\cdots{q_j}^{l_j}$

$\sigma(mn)=(1+p_1+{p_1}^2+\cdots+{p_1}^{k_1})(1+p_2+{p_2}^2+\cdots+{p_2}^{k_2})\times\cdots\times(1+q_j+{q_j}^2+\cdots+{q_j}^{l_j})$

$$\begin{aligned}\sigma(m)\sigma(n)=&[(1+p_1+{p_1}^2+\cdots+{p_1}^{k_1})\times\cdots\times(1+p_i+{p_i}^2+\cdots+{p_i}^{k_i})]\times\\&\left[(1+q_1+{q_1}^2+\cdots+{q_1}^{l_1})\times\cdots\times\left(1+q_j+{q_j}^2+\cdots+{q_j}^{l_j}\right)\right]=\sigma(mn)\end{aligned}$$ ■

定理 1：若 $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}$ 為素數，則 $\boldsymbol{n}$ 亦是素數，$\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$。

證：若 n 不是素數，則 $n=rs$，$r,s\in N$ ，$r,s>1$

$2^n-1=2^{rs}-1=(2^r)^s-1=(2^r-1)[(2^r)^{s-1}+\cdots+2^r+1]$

$\therefore\ (2^r-1)|(2^n-1) \qquad (\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore\ n$ 是素數。 ■

定理 2：若 2^n-1 是素數，則 $N=2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全數。

證：$\because$ 2^n-1 是素數

$\therefore$ N 的素因數只有 2 和 2^n-1

$\because$ $\gcd(2^{n-1},\ 2^n-1)=1$

$\therefore$ $\sigma(N)=\sigma(2^{n-1}(2^n-1))$

$$=\sigma(2^{n-1})\sigma(2^n-1) \qquad \text{(性質 1)}$$

$$=(1+2+\cdots+2^{n-1})\times(1+2^n-1)$$

$$=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}\times 2^n$$

$$=(2^n-1)\times 2^n$$

$$=2\times 2^{n-1}\times(2^n-1)$$

$$=2N$$

$\therefore$ N 為完全數。 ■

定理 3：若 $\boldsymbol{N}$ 是偶完全數，則 $\boldsymbol{N}$ 必可表示為 $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1})$ ，當中 $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}$ 為素數。

證：設 $N=2^{n-1}m$ 為一偶完全數， m 為奇數

$\because\ \gcd(2^{n-1},m)=1$

$\therefore\ \sigma(N)=\sigma(2^{n-1}m)=\sigma(2^{n-1})\sigma(m)$ (性質 1)

$$=(1+2+\cdots+2^{n-1})\sigma(m)$$

$$=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}\sigma(m)=(2^n-1)\sigma(m)$$

$\because\ N$ 為一偶完全數

$\therefore\ \sigma(N)=2N=2(2^{n-1}m)=2^n m$

$\therefore\ (2^n-1)\sigma(m)=2^n m$

$$\sigma(m)=\frac{2^n m}{2^n-1}=\frac{[(2^n-1)+1]m}{2^n-1}=m+\frac{m}{2^n-1}$$

$\because\ \sigma(m)$ 和 m 均為整數 $\therefore\ \frac{m}{2^n-1}$ 亦是整數

設 $d=\frac{m}{2^n-1}$ ， $\sigma(m)=m+\frac{m}{2^n-1}=m+d$

若 $d\neq 1$ $\because\ 2^n-1|m$ $\therefore\ d|m$

$\because\ \sigma(m)$ 是 m 所有正因數之和 $\therefore\ \sigma(m)\geq m+d+1$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore\ d=1$，$\frac{m}{2^n-1}=1$

$m=2^n-1$

$\because\ \sigma(m)=m+1$

$\therefore\ m$ 為素數。

$\therefore\ N$ 必可表示為 $2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。 ■

例子：

6 為偶完全數，$6 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$，當中 $2^2 - 1 = 3$ 為素數。

28 為偶完全數，$28 = 2^{3-1}(2^3 - 1)$，當中 $2^3 - 1 = 7$ 為素數。

496 為偶完全數，$496 = 2^{5-1}(2^5 - 1)$，當中 $2^5 - 1 = 31$ 為素數。

定理 4：若 $\boldsymbol{N}$ 是完全數，則 $\boldsymbol{\sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2}$ ，反之亦然。

證：(=>) $\because\ d|N \Leftrightarrow \left.\frac{N}{d}\right| N$

$\therefore\ \sum_{d|N} d = \sum_{d|N} \frac{N}{d} = N \sum_{d|N} \frac{1}{d}$

$\because\ N$ 是完全數

$\therefore\ \sum_{d|N} d = \sigma(N) = 2N$

$\therefore\ N \sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2N$

$\therefore\ \sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2$

(<=) $\because\ \sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2$

$\therefore\ \frac{\sigma(N)}{N} = 2$

$\therefore\ \sigma(N) = 2N$

$\therefore\ N$ 是完全數 ■

例子：

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=2$$

定理 5：每個偶完全數都可以寫成連續自然數之和，即每個偶完全數均是三角形數。

證：根據定理 3，若 N 是偶完全數，則 $N=2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。

$$\begin{aligned}\therefore\quad N &= 2^{n-1}(2^n-1)\\ &= \frac{1}{2}\times 2^n(2^n-1)\\ &= 1+2+3+\cdots+(2^n-1)\end{aligned}$$

$\therefore$ 每個偶完全數均是三角形數。 ■

例子：

$6=1+2+3$

$28=1+2+3+4+5+6+7$

$496=1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots+31$

定理 6：若 $\boldsymbol{N=2^{n-1}(2^n-1)}$ 為偶完全數 $\boldsymbol{N\neq 6}$，則 $\boldsymbol{N}$ 可以表示成連續奇立方數之和：$\boldsymbol{N=1^3+3^3+\cdots+(2\times 2^{\frac{n-1}{2}}-1)^3}$。

證：$\because\ \sum_{i=1}^{k} i^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ （可用數學歸納法證明）

$\therefore\quad 1^3+3^3+\cdots+(2\times 2^{\frac{n-1}{2}}-1)^3$

$=1^3+3^3+\cdots+(2m-1)^3$ (設 $m=2^{\frac{n-1}{2}}$)

$=[1^3+2^3+3^3+\cdots+(2m-1)^3+(2m)^3]-[2^3+4^3+\cdots+(2m)^3]$

$=\frac{(2m)^2(2m+1)^2}{4}-2^3(1^3+2^3+\cdots+m^3)$

$$=\frac{(2m)^2(2m+1)^2}{4}-8\times\frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

$=m^2(2m+1)^2-2m^2(m+1)^2$

$=m^2(2m^2-1)$

$=(2^{\frac{n-1}{2}})^2\left[2\times(2^{\frac{n-1}{2}})^2-1\right]$

$=2^{n-1}(2\times 2^{n-1}-1)$

$=2^{n-1}(2^n-1)$

$\therefore$ 若 $N=2^{n-1}(2^n-1)$ 為偶完全數 $N\neq 6$，則

$N=1^3+3^3+\cdots+(2\times 2^{\frac{n-1}{2}}-1)^3$ ■

例子：

$28=1^3+3^3$

$496=1^3+3^3+5^3+7^3$

$8128=1^3+3^3+5^3+\cdots+15^3$

定理 7：所有的偶完全數都可以表達為 **2** 的一些連續正整數次冪之和，而項數為素數。

證：根據定理 3，若 N 是偶完全數，則 $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ ，當中 $2^n - 1$ 為素數。

$$\therefore \quad N = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

$$= 2^{n-1}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$$

$$= 2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^{2n-2}$$

∴ 所有的偶完全數都可以表達為 2 的一些連續正整數次冪之和，而項數為 n 。

根據定理 1，若 $2^n - 1$ 為素數，則 n 亦為素數。

∴ $2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^{2n-2}$ 的項數為素數。 ■

例子：

$6 = 2^1 + 2^2$
項數是 2（素數）。

$28 = 2^2 + 2^3 + 2^4$
項數是 3（素數）。

$496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$
項數是 5（素數）。

定理 8：如果 $\boldsymbol{N}$ 是偶完全數，並將 $\boldsymbol{N}$ 轉為二進制數，則該數有 $\boldsymbol{2n-1}$ 個數字，其中前 $\boldsymbol{n}$ 個是 $\boldsymbol{1}$，最後 $\boldsymbol{n-1}$ 個是 $\boldsymbol{0}$。

證：根據定理 7，

$$N = 2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^{2n-2}$$

$$= 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + \cdots + 0 \times 2^{n-2} + 1 \times 2^{n-1} + 1 \times 2^n + \cdots + 1 \times 2^{2n-2}$$

$$= \underbrace{111 \cdots 1}_{n}\underbrace{000 \cdots 0_2}_{n-1} \qquad \blacksquare$$

例子：

$6 = 110_2$

$28 = 11100_2$

$496 = 111110000_2$

定理 9：偶完全數必以 $\mathbf{6}$ 或 $\mathbf{8}$ 結尾。

證：設 N 為偶完全數

根據定理 3，
N 必可表示為 $2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。

根據定理 1，
$\because$ 2^n-1 為素數
$\therefore$ n 亦為素數

若 $n=2$，則 $N=6$

若 $n>2$ ，則 $n=4m+1$ 或 $n=4m+3$

情況一：若 $n=4m+1$ ， 則 $N=2^{4m+1-1}(2^{4m+1}-1)$
$$=2^{8m+1}-2^{4m}=2\cdot 16^{2m}-16^m$$

$\because$ $16^t\equiv 6(mod\ 10)$ （可用數學歸納法證明）

$\therefore$ $N\equiv 2\times 6-6\equiv 6(mod\ 10)$

情況二：若 $n=4m+3$ ， 則 $N=2^{4m+3-1}(2^{4m+3}-1)$
$$=2^{8m+5}-2^{4m+2}=2\cdot 16^{2m+1}-4\cdot 16^m$$

$\because$ $16^t\equiv 6(mod\ 10)$

$\therefore$ $N\equiv 2\times 6-4\times 6\equiv -12\equiv 8(mod\ 10)$

$\therefore$ 偶完全數必以 6 或 8 結尾。 ■

例子：首五個完全數分別為 $6,28,496,8128$ 和 33550336，全部均以 6 或 8 結尾。

定理 10：若偶完全數以 **8** 結尾，則是以 **28** 結尾。

證明：承接定理 9 之證明

若 $n = 4m + 3$ ，則 $2^{n-1} = 2^{4m+3-1} = 2^{4m+2} = 16^m \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4\ (mod\ 10)$

$\because\ n > 2 \qquad \therefore\ 4|2^{n-1}$

假設 $2^{n-1} = 100A + 10B + C$ ，A, B, C 為非負整數， $0 \le B, C\ \le 9$ ，

$\because\ 4|100$

$\therefore$ 4 可整除 2^{n-1} 的最後兩位數，故共有以下五種可能：

$2^{n-1} \equiv 4, 24, 44, 64$ 或 $84 (mod\ 100)$

$2^n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \equiv 7, 47, 87, 27$ 或 $67\ (mod\ 100)$

$N = 2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 4 \cdot 7, 24 \cdot 47, 44 \cdot 87, 64 \cdot 27$ 或 $84 \cdot 67 \equiv 28 (mod\ 100)$

$\therefore$ 若偶完全數以 8 結尾，則是以 28 結尾。 ■

例子：

28 和 8128 為以 8 結尾之偶完全數，兩個均以 28 結尾。

定理 11：除了 **6** 以外的偶完全數，把它的各位數字相加，直到變成個位數，那麼這個個位數一定是 **1** 。

證：設 N 為偶完全數

根據定理 3，

N 必可表示為 $2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。

若 $n=3,\ N=28,\ 2+8=10,\ 1+0=1$

根據定理 1，

$\because\ 2^n-1$ 為素數

$\therefore\ n$ 亦為素數

$\therefore$ 若$n>3$ ，則 $n\equiv 1$ 或 $2\ (mod\ 3)$

情況一： 若 $n\equiv 1\ (mod\ 3)$，設 $n=3k+1$

$\because\ n$ 是奇數 $\therefore\ k$ 是偶數， 設 $k=2k'$ ， $n=6k'+1$

$N=2^{6k'+1-1}(2^{6k'+1}-1)$

$=2^{6k'}(2^{6k'+1}-1)$

$=64^{k'}(2\cdot 64^{k'}-1)$

$\equiv(1)(2\times 1-1)=1(mod\ 9)$ $\because\ 64^t\equiv 1\ (mod\ 9)$ （可用數學歸納法證明）

情況二： 若 $n \equiv 2\ (mod\ 3)$，設 $n = 3k + 2$

$\because$ n 是奇數 $\therefore$ k 也是奇數， 設 $k = 2k' + 1$ ， $n = 6k' + 5$

$N = 2^{6k'+5-1}\left(2^{6k'+5} - 1\right)$

$= 2^{6k'+4}\left(2^{6k'+5} - 1\right)$

$= 16 \times 64^{k'}(32 \cdot 64^{k'} - 1)$

$\equiv 16(1)(32 \times 1 - 1) \equiv (-2)(-4 - 1) \ \equiv 1(mod\ 9)$ $\because 16 \equiv -2(mod\ 9), 32 \equiv -4(mod\ 9)$

$\therefore$ $N \equiv 1(mod\ 9)$

設 $N = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^i$

則 $N = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{r} a_i \times 1^i = \sum_{i=0}^{r} a_i (mod\ 9)$，而 $N \equiv 1(mod\ 9)$

$\therefore$ 除了 6 以外的偶完全數，把它的各位數字相加，直到變成個位數，那麼這個個位數一定是 1 。 ■

例子：

$28 \ \rightarrow \ 2 + 8 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

$496 \rightarrow 4 + 9 + 6 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

$8128 \rightarrow 8 + 1 + 2 + 8 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

定理 12： 一個完全數的真因數必不是完全數。

證：設 N 為完全數

根據定理 4，$\sum_{d|N}\frac{1}{d}=2$

假設 d' 為 N 的真因數，而 d' 是完全數，則 $d'|N$ ， $d'\neq N$

再根據定理 4，$\sum_{d"|d'}\frac{1}{d"}=2$

$\because$ $d"|d'$ ， $d'|N$

$\therefore$ $d"|N$

$\therefore$ $\sum_{d"|d'}\frac{1}{d"}<\sum_{d|N}\frac{1}{d}$ $(d'<N)$

$\therefore$ $2<2$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ 一個完全數的真因數必不是完全數。 ■

例子：

6 是完全數，$1,2,3$ 是 6 的真因數，$1,2,3$ 必不是完全數。

另一方面，$6k$ 也不是完全數，k 為正整數，$k>1$。

因若存在 k'，令 $6k'$ 為完全數，則根據本定理，$6k'$的真因數 6 必不是完全數。$(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ 對於任何正整數 k，$k>1$ ，$6k$ 也不是完全數。

定理 13： $\forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{N}$，若 $\boldsymbol{p}$ 是奇素數，$\boldsymbol{p^k}$ 必不會是完全數。

證：$\frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \frac{1+p+\cdots+p^k}{p^k} = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \le \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$\because\ \sigma(p^k) \le \frac{3}{2} p^k$

$\therefore\ \sigma(p^k) \ne 2p^k$

$\therefore\ p^k$ 不是完全數。 ■

定理 14：若 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 為奇素數，$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{N}$，則 $\boldsymbol{p^k q^l}$ 必不會是完全數。

證：若 $p = q$ ，則 $p^k q^l = p^{k+l}$

根據定理 13，p^{k+l} 必不會是完全數。

若 $p \ne q$，則 $\frac{\sigma(p^k q^l)}{p^k q^l} = \frac{\sigma(p^k)\sigma(q^l)}{p^k q^l}$ $\because$ $\gcd(p^k, q^l) = 1$ ，並根據性質 1

$$= (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k}) \times (1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^l})$$

$$\le (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^i}) \times (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q^j})$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{15}{8} < 2$$

$\therefore\ \sigma(p^k q^l) \ne 2p^k q^l$

$\therefore\ p^k q^l$ 必不會是完全數。 ■

定理 15：若 $\boldsymbol{N = p_1 p_2 \cdots p_k}$，$\boldsymbol{p_i}$ 為相異奇素數， $\boldsymbol{1 \le i \le k}$，則 $\boldsymbol{N}$ 必不是完全數。

證：$\forall \ 1 \le i < j \le k, \ p_i \ne p_j$

$$\begin{aligned}\sigma(N) &= \sigma(p_1 p_2 \cdots p_k) \\ &= \sigma(p_1)\sigma(p_2)\cdots\sigma(p_k) && \because \ \gcd(p_i, p_j) = 1, \ i \ne j\text{，並根據性質 1} \\ &= (1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k)\end{aligned}$$

若 N 為完全數，則 $\sigma(N) = 2N = 2p_1 p_2 \cdots p_k$

$\therefore \ (1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k) = 2p_1 p_2 \cdots p_k$

$\because \ p_i$ 為奇數

$\therefore \ 1 + p_i$ 為偶數

設 $2q_i = 1 + p_i$

$(2q_1)(2q_2)\cdots(2q_k) = 2p_1 p_2 \cdots p_k$

$$2^k \prod_{i=1}^{k} q_i = 2p_1 p_2 \cdots p_k$$

$\therefore \ k = 1$

$\therefore \ \sigma(N) = \sigma(p_1) = 1 + p_1 \ne 2p_1$ ， $p_1 \ge 3$

$\therefore \ \sigma(N) \ne 2N$

$\therefore$ 若 $N = p_1 p_2 \cdots p_k$，p_i 為相異奇素數， $1 \le i \le k$，則 N 必不是完全數。

■

定理 16：完全平方數必不是完全數。

證：

情況一： N 是偶數

假設 N 是完全數，根據定理 3，

$N=2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。

$\therefore$ N 不是完全平方數。

情況二： N 為奇數

假設 N 是完全平方數，

設 N 的標準分解式為 $N={p_1}^{2k_1}{p_2}^{2k_2}\cdots{p_l}^{2k_l}$ ， $\forall\, 1\leq i\leq l$ ，p_i 為奇素數

若 N 為完全數，則$\sigma(N)=2N$

$\sigma({p_1}^{2k_1}{p_2}^{2k_2}\cdots{p_l}^{2k_l})=2N$

$\sigma({p_1}^{2k_1})\sigma({p_2}^{2k_2})\cdots\sigma({p_l}^{2k_l})=2N$ $\because \gcd\left({p_i}^{2k_i},{p_j}^{2k_j}\right)=1,\ i\neq j$，並根據性質 1

$$\underbrace{(1+p_1+\cdots+{p_1}^{2k_1})}_{2k_1+1\text{ 項}}\underbrace{(1+p_2+\cdots+{p_2}^{2k_2})}_{2k_2+1\text{ 項}}\cdots\underbrace{(1+p_l+\cdots+{p_l}^{2k_l})}_{2k_l+1\text{ 項}}=2N$$

上式左方為一奇數，右方為一偶數 (→←)

$\therefore$ N 不是完全數。

$\therefore$ 完全平方數必不是完全數。 ■

定理 17：完全數的正因數個數必為偶數。

證：設 N 為完全數，而 N 的標準分解式為 $p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_k^{l_k}$

$\because$ N 的正因數個數
$= (1+p_1+\cdots+p_1^{l_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{l_2})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{l_k})$ 的項數

$\therefore$ N 的正因數個數 $=(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_k+1)$

根據定理 16，N 必不是完全平方數

$\therefore$ $\exists\, i,\ \ 1\le i\le k,\quad l_i$ 為奇數

$\therefore$ l_i+1 為偶數

$\therefore$ $(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_k+1)$ 為偶數

$\therefore$ 完全數的正因數個數必為偶數。 ■

例子：

6 為完全數，6 的正因數為 $1,2,3,6$，正因數個數為 4 (偶數)。

28 為完全數，28 的正因數為 $1,2,4,7,14,28$，正因數個數為 6 (偶數)。

496 為完全數，496 的正因數為 $1,2,4,8,16,31,62,124,248,496$，

正因數個數為 10 (偶數)。

定理 18：若 $\boldsymbol{N}$ 為偶完全數，根據定理 3，$\boldsymbol{N = 2^{k-1}(2^k - 1)}$，當中 $\boldsymbol{2^k - 1}$ 為素數，則 $\boldsymbol{N}$ 的所有正因數之積為 $\boldsymbol{N^k}$。

證：$\because$ N 為偶完全數
$\therefore$ 根據定理 3， $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$，當中 $2^k - 1$ 為素數。

設 $p = 2^k - 1$

N 的所有正因數為 $1, p, 2, \cdots, 2^{k-1}, 2p, \cdots, 2^{k-1}p$

N 的所有正因數之積

$= 1 \times p \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{k-1} \times 2p \times 2^2p \times \cdots \times 2^{k-1}p$

$= p^{1+k-1} \times 2^{1+2+\cdots+k-1+1+2+\cdots+k-1}$

$= p^k \times 2^{\frac{(1+k-1)(k-1)}{2} \times 2}$

$= p^k \times 2^{k(k-1)}$

$= (2^{k-1}p)^k$

$= [2^{k-1}(2^k - 1)]^k$

$= N^k$

$\therefore$ N 的所有正因數之積為 N^k，即 $\prod_{d|N} d = N^k$ ■

例子：

$6 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$，$\sum_{d|6} d = 2 \times 6$，$\prod_{d|6} d = 6^2$
$28 = 2^{3-1}(2^3 - 1)$，$\sum_{d|28} d = 2 \times 28$，$\prod_{d|28} d = 28^3$
$496 = 2^{5-1}(2^5 - 1)$，$\sum_{d|496} d = 2 \times 496$，$\prod_{d|496} d = 496^5$

一般地，對於偶完全數 $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ ，$\sigma(N) = \sum_{d|N} d = 2N$，$\prod_{d|N} d = N^k$ 。

註釋：

註 1：本文參考資料包括：

John Voight, Perfect Numbers: An Elementary Introduction
(https://math.dartmouth.edu/~jvoight/notes/perfelem.pdf)
David M. Burton, *Elementary Number Theory*, pp. 219-225, McGraw-Hill, New York, 2007.
李學數（1979）。《數學和數學家的故事》（第二集），頁 161-175。香港：廣角鏡出版社有限公司。
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E6%95%B0
https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d213/21302.pdf
及筆者早年所摘錄之資料，惜當時並沒有記下相關的出處，請讀者見諒。

註 2：原文可參考以下網址：http://kyyeung.synology.me/Sharing/lit-21/perfect-number.htm

附錄：

現一併列出本文所涉及的數學定義、性質和定理，以便讀者研習。

定義 1：$\sigma(n)$ 指 n 的所有正因數之和，即 $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ ，$n\in N$。

定義 2：完全數是一些特殊的自然數，它所有的正真因數（即除了自身以外的正因數）的和，恰好等於它本身。若 n 是完全數，即 $\sigma(n)=2n$ 。

性質 1：若 $\gcd(m,n)=1$ ，則 $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$ 。

定理 1：若 2^n-1 為素數，則 n 亦是素數，$n\in N$。

定理 2：若 2^n-1 是素數，則 $N=2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全數。

定理 3：若 N 是偶完全數，則 N 必可表示為 $2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。

定理 4：若 N 是完全數，則 $\sum_{d|N}\frac{1}{d}=2$ ，反之亦然。

定理 5：每個偶完全數都可以寫成連續自然數之和，即每個偶完全數均是三角形數。

定理 6：若 $N=2^{n-1}(2^n-1)$ 為偶完全數 $N\neq 6$，則 N 可以表示成連續奇立方數之和：$N=1^3+3^3+\cdots+(2\times 2^{\frac{n-1}{2}}-1)^3$。

定理 7：所有的偶完全數都可以表達為 2 的一些連續正整數次冪之和，而項數為素數。

定理 8：如果 N 是偶完全數，並將 N 轉為二進制數，則該數有 $2n-1$ 個數字，其中前 n 個是 1，最後 $n-1$ 個是 0。

定理 9：偶完全數必以 6 或 8 結尾。

定理 10：若偶完全數以 8 結尾，則是以 28 結尾。

定理 11：除了 6 以外的偶完全數，把它的各位數字相加，直到變成個位數，那麼這個個位數一定是 1 。

定理 12： 一個完全數的真因數必不是完全數。

定理 13： $\forall k\in N$，若 p 是奇素數，p^k 必不會是完全數。

定理 14：若 p,q 為奇素數，$k,l\in N$，則 p^kq^l 必不會是完全數。

定理 15：若 $N=p_1p_2\cdots p_k$，p_i 為相異奇素數，$1\leq i\leq k$，則 N 必不是完全數。

定理 16：完全平方數必不是完全數。

定理 17：完全數的正因數個數必為偶數。

定理 18：若 N 為偶完全數，根據定理 3，$N=2^{k-1}(2^k-1)$，當中 2^k-1 為素數，則 N 的所有正因數之積為 N^k。

3-5-2023