

一個巧妙的數學證明

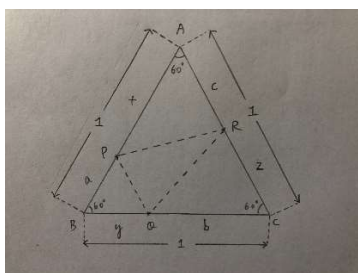
列志佳

日前，有一位對數學甚感興趣的舊生〔註1〕，傳了一條影片連結〔註2〕給我，當中分享了一個十分精彩的解題方法，非常有趣！本人隨後也將該連結轉發給一些對數學感興趣的朋友，不少也對相關的做法表示欣賞！

題目：正實數 a, b, c, x, y, z 滿足 $a + x = b + y = c + z = 1$ ，
求證： $ay + bz + cx < 1$ 。

這原是一條代數題目，深信不少朋友(包括本人)也會嘗試以代數方法入手，我估計有一定難度！但影片中卻用上了幾何方法，證明步驟非常簡潔、漂亮！

證明：設 $\triangle ABC$ 為一個邊長為 1 的等邊三角形，三邊長度分別為 $a + x$ ， $b + y$ 和 $c + z$ ，如下圖：



現將 P, Q, R 三點連起來。

$\therefore \triangle BQP$ 的面積 + $\triangle CRQ$ 的面積 + $\triangle APR$ 的面積 $<$ $\triangle ABC$ 的面積

$$\therefore \frac{1}{2} a y \sin 60^\circ + \frac{1}{2} b z \sin 60^\circ + \frac{1}{2} c x \sin 60^\circ < \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ$$

$$\therefore ay + bz + cx < 1 \quad \blacksquare$$

解題者想到由正三角形切入，並運用三角形面積公式，與題目好像是兩碼子的事，實在非常精彩，令筆者佩服！

註1：該生畢業於香港科技大學數學系。

註2：

https://www.facebook.com/100083735495130/videos/1379427285987523/?extid=WA-UNK-UNK-UNK-IOUS_GK0T-GK1C&mibextid=KPDiXm&ref=sharing

5-9-2023