

## 一個有趣的數學證明

列志佳

筆者早日讀到一道數學題，其證明方法十分有趣〔註 1〕。本人其後與一位熱愛數學的好朋友分享，現也將相關的內容整理如下，供各位讀者參考。

**題目：**證明存在無理數  $x, y$  使得  $x^y$  是有理數〔註 2〕。

**證明：**

若  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  是有理數，由於  $\sqrt{2}$  是無理數，故  $x = y = \sqrt{2}$  即是滿足要求的無理數。

若  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  是無理數，令  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$ ，

$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 2 是有理數，

故  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$  即是滿足要求的無理數。 ■

作者表示：「上述證明並沒有給出具體的  $x, y$  使得  $x^y$  是有理數，只是證明了當  $x = y = \sqrt{2}$  時，或者當  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$  時， $x^y$  是有理數。因而這種證明是非構造型證明。」〔註 3〕

整個論證十分簡潔、微妙、有趣，筆者讀後，內心實在深表欣賞！

註 1：本文所分享的證明參考及節錄自以下的著作：

趙希順（2021）。《簡明數理邏輯》，頁 8。北京：科學出版社。

註 2：有關有理數、無理數之定義，可參考以下的網頁，內容扼要清晰。

<https://www.shuxuele.com/irrational-numbers.html>

以下兩個網頁則可讓讀者對指數律多一點認識：

<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=16780>

<https://web.ntnu.edu.tw/~495401300/page2.htm>

註 3：同註 1。

10-8-2023