美麗的正整數性質

$$1 = 1^2$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

$$\vdots$$

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1 = n^2$$

$n = 1, 2, 3 \cdots$

性質 **1**

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$\vdots$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

$n = 1, 2, 3 \cdots$

性質 **2**

$$1 = 1^2$$

$$2 + 3 + 4 = 3^2$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 5^2$$

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 7^2$$

$$\vdots$$

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (3n - 2) = (2n - 1)^2$$

$n = 1, 2, 3 \cdots$

性質 **3**

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

$$\vdots$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

$n = 1, 2, 3 \cdots$

性質 **4**

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

$$\vdots$$

$$n^2 + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \cdots + (n^2 + 2n)$$

$n = 1, 2, 3 \cdots$

性質 **5**

後記

1. 筆者十分喜歡以上 5 項正整數性質，全部也是本人在平時閱讀數學書時記錄下來的，現願與各位分享，好讓大家一起欣賞簡潔、迷人、和諧的數學美！

2. 以上 5 項性質的證明如下，主要涉及「等差數列求和公式」：

性質 1：

$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=2\times(1+2+\cdots+n)-n$

$=2\times\frac{n(1+n)}{2}-n=n+n^2-n=n^2\ ,\ n=1,2,3\cdots$ ■

性質 2：

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n}{2}(1+2n-1)=\frac{n}{2}(2n)=n^2\ ,\ n=1,2,3\cdots$ ■

性質 3：

$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=\frac{(2n-1)(n+3n-2)}{2}=(2n-1)^2\ ,n=1,2,3\cdots$ ■

性質 4：

$\because\ \sum_{i=1}^{k} i^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}\ ,\ k=1,2,3\cdots$ （可用數學歸納法證明）

$\therefore\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(1+2+3+\cdots+n)^2,n=1,2,3\cdots$ ■

性質 5：

左方$=n^2+(n^2+1)+\cdots+(n^2+n)=\frac{(n+1)(n^2+n^2+n)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

右方$=(n^2+n+1)+\cdots+(n^2+2n)=\frac{n(n^2+n+1+n^2+2n)}{2}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\because$ 左方 = 右方

$\therefore\ n^2+(n^2+1)+\cdots+(n^2+n)=(n^2+n+1)+\cdots+(n^2+2n)\ ,\ n=1,2,3\cdots$ ■

3. 若讀者有興趣，可參閱筆者另一篇拙作〈我所喜愛的一些整數性質〉（ https://kyyeung.synology.me/Sharing/lit-21/integer.pdf ），當中亦有述及本文部分內容。

整理：列志佳　　日期：15-9-2024