我所喜愛的一些整數性質〔註〕

列志佳

本人在閱讀數學書時，若偶然讀到一些自己很喜歡的定理或證明，一般會將之抄錄下來，好讓他日重溫，再次細味。以下十項均與整數性質有關，非常漂亮、迷人，證明也甚為簡潔，願與對數學有興趣的讀者分享！

1. 奇數一定能表為兩平方數之差。

證：$2n+1=(n+1)^2-n^2 \quad ,\forall n \in Z$ ∎

2. 首 $\boldsymbol{n}$ 個正奇數之和為 $\boldsymbol{n}$ 的平方。

證：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n}{2}(1+2n-1)=\frac{n}{2}(2n)=n^2$， $\forall\, n \in N$。 ∎

3.

$$\mathbf{1=1^2}$$
$$\mathbf{2+3+4=3^2}$$
$$\mathbf{3+4+5+6+7=5^2}$$
$$\mathbf{4+5+6+7+8+9+10=7^2}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2 \quad \forall n \in N}$$

證：$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)$

$$=\frac{(2n-1)[n+(3n-2)]}{2}$$

$$=(2n-1)^2\ ,\ \forall n \in N$$ ∎

4. 首 $\boldsymbol{n}$ 個正奇數之立方和為三角形數。

證： $\because\ \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ （可用數學歸納法證明）

$\therefore\ \forall n \in N$

$$1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3$$

$$= [1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 + (2n)^3] - [2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3]$$

$$= \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - 2^3(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$$

$$= n^2(2n^2-1)$$

$$= \frac{1}{2}(2n^2-1)(2n^2-1+1)$$

$$= \frac{1}{2}N(N+1) \qquad (\text{設 } N = 2n^2-1)$$

$\therefore\ 1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3$ 是三角形數 ■

5. $\boldsymbol{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2}, \quad \boldsymbol{\forall n \in N}$

證：$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 \quad ,\forall n \in N$$ ■

6. 任意四個連續整數的乘積加 **1** 必定是一個平方數。

證：設四個連續整數為 $n-1, n, n+1, n+2$ ， $n \in Z$

$(n-1)n(n+1)(n+2)+1$

$= n(n^2-1)(n+2)+1$

$= n^4+2n^3-n^2-2n+1$

$= (n^2+n-1)^2$ ■

7. 對於任意正整數 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{k}\ (\boldsymbol{k}>\mathbf{1})$ ， $\boldsymbol{n^k}$ 必是 $\boldsymbol{n}$ 個連續奇數之和。

證：設 a 和 b 為兩個奇偶性相同的正整數

若 a 和 b 同偶，

$ab = (a-1)+(a+1)+(a-3)+(a+3)+\cdots+(a-b+1)+(a+b-1)$

若 a 和 b 同奇，

$ab = a+(a-2)+(a+2)+\cdots+(a-b+1)+(a+b-1)$

$\therefore$ ab 是 b 個連續奇數之和。

$\because$ $k-1>0$

$\therefore$ n^{k-1} 與 n 為兩個奇偶性相同的正整數

$\therefore$ $n^k = n^{k-1}\cdot n$ 是 n 個連續奇數之和 ■

8. 對於任意的正整數 $\boldsymbol{K}$，必有 $\boldsymbol{K}$ 個連續正整數都是合數。

證：$\forall K \in N,$ 考慮下列 K 個連續正整數：

$$(K+1)!+2, (K+1)!+3, \dots, (K+1)!+K+1$$

$\because \forall\, n, \quad 2 \le n \le K+1,$

$(K+1)!+n = n\left[\frac{(K+1)!}{n}+1\right]$ ，而 $\frac{(K+1)!}{n}+1$ 為一整數

$\therefore\ (K+1)!+n$ 為一合數 ■

9. 任意給定正整數 $\boldsymbol{m}$ ，一定有 $\boldsymbol{m}$ 的某一個整倍數，它完全由 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 兩個數字所組成。

證： 考慮正整數列 $1, 11, 111, \cdots, \underbrace{111\cdots1}_{m+1\text{ 個}}$

根據鴿巢原理，其中一定至少有兩個數，例如說 $a, b, a<b$

$a \equiv b (mod\ m)$

$b-a$ 是 m 的一個整倍數，而 $b-a$ 具有下列形式：

$11\cdots100\cdots0$ ■

10. 形如 $\boldsymbol{4n-1}$ 的數中必有無限多個素數，$\boldsymbol{n \in N}$。

證： $\because$ $(4n_1+1)(4n_2+1) = 4(4n_1n_2+n_1+n_2)+1$
仍是形如 $4n+1$ 的數， $n_1, n_2 \in N$

$\therefore$ 把形如 $4n-1$ 的數分解成素因數的乘積時，這些素因數不可能都是形如 $4n+1$ 的數，而必然有形如 $4n-1$ 的數。

假設形如 $4n-1$ 的數中只包括 k 個素數：$p_1, p_2, \cdots, p_k$

令 $a = 4(p_1p_2\cdots p_k)-1$

$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 都不是 a 的素因數

假如 a 是素數，a 本身形如 $4n-1$ 的數，$a \neq p_i$ $i=1,\cdots,k$ (→←)

假如 a 不是素數，則 a 必含有形如 $4n-1$ 的素因數

而 $p_1, p_2, \cdots p_k$ 都不是 a 的素因數

$\therefore$ 除 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 外還有形如 $4n-1$ 的素數存在 (→←)

$\therefore$ 有無限多個形如 $4n-1$ 的素數。 ■

註：

第 3 項參考自愛德華．J．巴爾博、默里．S．克拉姆金、威廉．O．J．莫澤著，王繼延、林磊、韓士安譯（2007）。《給數學迷的 500 個挑戰性問題》，頁 28, 153。中國：上海科技教育出版社。
第 7 項參考自常庚哲、蘇淳（1991）。《奇數和偶數》，頁 76, 80。中國：上海教育出版社。
第 9 項參考自常庚哲（1991）。《抽屜原則及其他》，頁 18。中國：上海教育出版社。
至於其餘 7 項，則整合自筆者早年所摘錄之資料，惜當時並沒有記下相關的出處，請讀者見諒。

19-4-2023