有關 6 的一個漂亮性質[註]

列志佳

摘要：本文旨在證明 6 是唯一一個為其真因數之和及積之正整數。

定義 1：$\sigma(n)$ 指 n 的所有正因數之和，即 $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ ，$n \in N$。

定義 2：完全數是一些特殊的自然數，它所有的正真因數（即除了自身以外的正因數）的和，恰好等於它本身。若 n 是完全數，即 $\sigma(n)=2n$ 。

性質 1：若 $\gcd(m,n)=1$ ，則 $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$ 。

證：設 m 和 n 的標準分解式分別為

$m=p_1{}^{k_1}p_2{}^{k_2}\cdots p_i{}^{k_i}$ ，$n=q_1{}^{l_1}q_2{}^{l_2}\cdots q_j{}^{l_j}$

$\because \gcd(m,n)=1$

$\therefore p_r \neq q_s \quad \forall\, 1\le r\le i,\ 1\le s\le j$ ，p_r，q_s 為素數

$mn=p_1{}^{k_1}p_2{}^{k_2}\cdots p_i{}^{k_i}q_1{}^{l_1}q_2{}^{l_2}\cdots q_j{}^{l_j}$

$$\sigma(mn)=(1+p_1+p_1{}^2+\cdots+p_1{}^{k_1})(1+p_2+p_2{}^2+\cdots+p_2{}^{k_2})\times\cdots\times(1+q_j+q_j{}^2+\cdots+q_j{}^{l_j})$$

$$\sigma(m)\sigma(n)=[(1+p_1+p_1{}^2+\cdots+p_1{}^{k_1})\times\cdots\times(1+p_i+p_i{}^2+\cdots+p_i{}^{k_i})]\times$$
$$[(1+q_1+q_1{}^2+\cdots+q_1{}^{l_1})\times\cdots\times(1+q_j+q_j{}^2+\cdots+q_j{}^{l_j})]=\sigma(mn) \quad \blacksquare$$

定理 1：若 N 是偶完全數，則 N 必可表示為 $2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。

證：設 $N=2^{n-1}m$ 為一偶完全數， m 為奇數

$\because\ \gcd(2^{n-1},m)=1$

$\therefore\ \sigma(N)=\sigma(2^{n-1}m)=\sigma(2^{n-1})\sigma(m)$ (性質 1)

$$=(1+2+\cdots+2^{n-1})\sigma(m)$$

$$=\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)\sigma(m)=(2^n-1)\sigma(m)$$

$\because\ N$ 為一偶完全數

$\therefore\ \sigma(N)=2N=2(2^{n-1}m)=2^nm$

$\therefore\ (2^n-1)\sigma(m)=2^nm$

$$\sigma(m)=\frac{2^nm}{2^n-1}=\frac{[(2^n-1)+1]m}{2^n-1}=m+\frac{m}{2^n-1}$$

$\because\ \sigma(m)$ 和 m 均為整數 $\therefore\ \frac{m}{2^n-1}$ 亦是整數

設 $d=\frac{m}{2^n-1}$ ， $\sigma(m)=m+\frac{m}{2^n-1}=m+d$

若 $d\neq 1$ $\because\ 2^n-1|m$ $\therefore\ d|m$

$\because\ \sigma(m)$ 是 m 所有正因數之和 $\therefore\ \sigma(m)\geq m+d+1$ (→←)

$\therefore\ d=1$，$\frac{m}{2^n-1}=1$

$m=2^n-1$

$\because\ \sigma(m)=m+1$

$\therefore\ m$ 為素數。

$\therefore\ N$ 必可表示為 $2^{n-1}(2^n-1)$ ，當中 2^n-1 為素數。 ■

定理 2： $\forall k \in N$，若 p 是奇素數，p^k 必不會是完全數。

證：$\frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \frac{1+p+\cdots+p^k}{p^k} = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$\because\ \sigma(p^k) \leq \frac{3}{2}p^k$

$\therefore\ \sigma(p^k) \neq 2p^k$

$\therefore\ p^k$ 不是完全數。 ■

定理 3： 若 p, q 為奇素數，$p \neq q$，則 pq 必不會是完全數。

證：假設 pq 為一完全數，則 $\sigma(pq) = 2pq$

$\because\ \gcd(p, q) = 1$
$\therefore\ \sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$ (性質 1)
$\therefore\ \sigma(p)\sigma(q) = 2pq$
$(1 + p)(1 + q) = 2pq$
$pq = p + q + 1$

$\because\ p > 2, q > 2$
$\therefore\ (p - 1)(q - 1) > 2$
$pq > p + q + 1$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore\ pq$ 不是完全數。 ■

定理 4：一正整數為其真因數之積的充分必要條件是此數為一素數的立方，或為兩個不同素數的積。

證：設 $n=p^3$ 或 $n=pq$ ，當中 p,q 為素數， $p\neq q$，

則 $\prod_{d|p^3,d\neq p^3} d=p\cdot p^2=p^3$ 或 $\prod_{d|pq,d\neq pq} d=pq$

反之，設 $n>1$ 是一個整數，滿足 $\prod_{d|n} d=n^2,\prod_{d|n}\frac{n}{d}=n^2$

可得 $\prod_{d|n} n=n^4$ (1)

設 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_j^{\alpha_j}$ 為 n 的標準分解式，

故 $d(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_j+1)$ 為 n 的因數個數

由(1)式可得

$n^{d(n)}=n^4$ (2)

再由(2)式得 $(\alpha_1+1)\cdots\left(\alpha_j+1\right)=4$

得出 $j=1,\alpha_1=3$ 或 $j=2,\alpha_1=\alpha_2=1$

即為一素數的立方或為兩個不同素數之積。 ■

性質 2：6 是唯一一個為其真因數之和及積之正整數。

證：根據定理 2，若 p 為奇素數，p^3 不是完全數，故 p^3 不會為其真因數之和及積之正整數。

此外，2 為唯一一個偶素數，惟 $2^3 = 8$ ，而 8 不是完全數。

∴ 若 p 為素數，p^3 不是完全數，故 p^3 不會為其真因數之和及積之正整數。

根據定理 3，若 p, q 為奇素數，pq 不是完全數，故 pq 同樣不會為其真因數之和及積之正整數。

根據定理 4，現只需考慮以下的情況：

若 $p = 2,\ q$ 為奇素數，$2q$ 為其真因數之積，而根據定理 1，偶完全數必定形如 $2^{n-1}(2^n - 1)$ ，當中 $2^n - 1$ 為素數。

∴ 只有當 $n = 2$， 即 $q = 2^2 - 1 = 3$ 時，$2q = 6$ 才是完全數。

故此，在所有正整數中，6 是唯一一個為其真因數之和及積之正整數。

即 $1, 2, 3$ 為 6 之所有真因數：

$6 = 1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$ 。 ■

註：筆者構思本文性質 2 之推論，其餘證明均參考及摘錄自坊間書籍、文獻，包括：
John Voight, Perfect Numbers: An Elementary Introduction
(https://math.dartmouth.edu/~jvoight/notes/perfelem.pdf)
孫琦、曹珍富編著（2012）。《初等數論經典例題》。中國：哈爾濱工業大學出版社。
本文有關定理 4 之內容，正取自孫、曹二人所編著的上述著作中第 9-10 頁。
惟尚有部分內容來自筆者早年所整理之筆記，惜當時並沒有記下相關的出處，請讀者見諒。

2-4-2023